



WEST BENGAL STATE UNIVERSITY

B.Sc. General PART-II Examinations, 2016

MATHEMATICS-GENERAL

PAPER-MTMG-III

Time Allotted: 3 Hours

Full Marks: 100

*The figures in the margin indicate full marks.
Candidates should answer in their own words
and adhere to the word limit as practicable.*

*প্রাণ্ডিক সীমার মধ্যস্থ সংখ্যাটি পূর্ণ মান নির্দেশ করে।
পরীক্ষার্থীরা যথা সম্ভব নিজের ভাষায় নির্দিষ্ট শব্দসীমার
মধ্যে উত্তর করিবেন।*

Answer Group A and B compulsorily and any one group from group C, D and E

Group-A

বিভাগ-ক

[Full Marks-20]

Answer Question No. 1 and any two questions from the rest.

১নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

1. Answer any two questions from the following:

2×2 = 4

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

(a) If the value of $e = 2.71828$ is replaced by 2.71934 then what is the percentage error?

যদি $e = 2.71828$ -এর মান 2.71934 দ্বারা পরিবর্তিত হয় তবে শতকরা ত্রুটি কত হইবে?

(b) Prove that the operators E and Δ follow commutative law of multiplication.

প্রমাণ করো E এবং Δ অপারেটর দ্বয় গুনের বিনিময় সূত্রকে মেনে চলে।

(c) If $f(-2) = f(3) = 7$ and $f(0) = 1$ find $f(10)$.

যদি $f(-2) = f(3) = 7$ এবং $f(0) = 1$ হয় তবে $f(10)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(d) Show that $\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$.

দেখাও যে, $\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$.

2. (a) Find by suitable interpolation formula, the value of $\log 4.515$ from the following data: 6

উপযুক্ত অন্তঃ মান সূত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত ফলাফল থেকে $\log 4.515$ -এর মান নির্ণয় করো:

$\log 4.51 = 0.6542$, $\log 4.52 = 0.6551$, $\log 4.53 = 0.6561$, $\log 4.54 = 0.6571$,
 $\log 4.55 = 0.6580$.

(b) State Newton's backward interpolation formula with its remainder term. 2

নিউটনের পশ্চাদবর্তী অন্তঃ মান সূত্রটি অবশিষ্ট পদসহ বিবৃত করুন।

3. Evaluate the integral $\int_0^1 (4x - 3x^2) dx$ taking 10 sub intervals by Trapezoidal rule. Compute the exact value and find the relative error in your result. 6+1+1

10টি উপবিস্তারে ভাগ করে $\int_0^1 (4x - 3x^2) dx$ সমাকলনটি Trapezoidal rule-এর সাহায্যে নির্ণয় করুন। সমাকলনটির সঠিক মান নির্ণয় করুন এবং প্রাপ্ত ফলের আপেক্ষিক ত্রুটি নির্ণয় করুন।

4. Using Newton-Raphson method, find the real root of the equation $x^3 - 8x - 4 = 0$ correct up to four significant figures. Give a geometrical significance of the method.

Newton-Raphson-এর সূত্র প্রয়োগ করে $x^3 - 8x - 4 = 0$ সমীকরণের বাস্তব বীজটির আসন্ন মান চার সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করুন। পদ্ধতিটির জ্যামিতিক তাৎপর্য দিন।

5. (a) Find a real root of the equation $x^3 - 4x - 9 = 0$ between 2 and 3 correct up to two significant figures by the method of bisection. 6

সমদ্বিখণ্ডন পদ্ধতিতে দুটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত সঠিক রাখিয়া $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণের 2 ও 3-এর মধ্যবর্তী একটি বাস্তব বীজ নির্ণয় করুন।

- (b) With usual meanings, show that $E^{-1} \equiv I - \nabla$. 2

প্রচলিত অর্থে প্রমাণ করুন $E^{-1} \equiv I - \nabla$ ।

Group-B

বিভাগ-খ

[Full Marks-40]

Answer Question No. 6 and any two questions from the rest.

৬নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

6. Answer any four questions from the following: 2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Define extreme point of a convex set.

একটি উত্তল সেটের প্রান্তিক বিন্দুর সংজ্ঞা দিন।

- (b) Find the basic feasible solutions of the system of equations.

নীচের সমীকরণতন্ত্রের মৌলিক কার্যকর সমাধানগুলি নির্ণয় করুন।

$$x_1 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 + x_3 = 4$$

- (c) Show that the set $S = \left\{ \frac{x}{|x|} \leq 2 \right\}$ is a convex set.

দেখাও যে $S = \left\{ \frac{x}{|x|} \leq 2 \right\}$ একটি উত্তল সেট।

- (d) A hyperplane is given by $x + 2y + 3z = 9$. In which half space the points (1, 2, 3) and (0, 1, -3) lie?

$x + 2y + 3z = 9$ একটি Hyper plane। (1, 2, 3) এবং (0, 1, -3) বিন্দুদ্বয় উহার কোন কোন অর্ধে অবস্থিত?

- (e) State the fundamental theorem of duality.

দ্বৈত সমস্যার মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত করুন।

- (f) Find graphically the feasible space for the LPP.

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নে প্রদত্ত LPP-এর কার্যকর দেশ নির্দেশ করুন।

$$\text{Maximize } z = 2x_1 + 5x_2$$

$$\text{Subject to } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$\text{and } 0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3$$

- (g) Find the initial basic feasible solution of the following transportation problem given below by Matrix-Minima method.

Matrix-Minima পদ্ধতি প্রয়োগ করে নীচের পরিবহন সমস্যাটির একটি প্রাথমিক মৌল কার্যকর সমাধান নির্ণয় করুন।

	D ₁	D ₂	D ₃	
O ₁	9	7	4	20
O ₂	2	9	8	15
	10	15	10	

7. (a) An agricultural firm has 180 tons of nitrogen fertilizers, 250 tons of phosphate and 220 tons of potash. It sells 3:3:4 mixtures of these substances at a profit of Rs. 15 per ton and 2:4:2 mixtures at a profit of Rs. 12 per ton respectively. Formulate the problem as an L.P.P to obtain minimum profit.

8

একটি কৃষি প্রতিষ্ঠানে 180 টন নাইট্রোজেন, 250 টন ফসফেট ও 220 টন পটাশ সার মজুত আছে। এই প্রতিষ্ঠান প্রতি টনে 15 টাকা লাভ রেখে সারগুলি যথাক্রমে 3:3:4 অনুপাতে মিশিয়ে বিক্রি করতে পারে। আবার প্রতি টনে 12 টাকা লাভ রেখে সারগুলি 2:4:2 অনুপাতে মিশিয়েও বিক্রি করতে পারে। একটি রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা রচনা করুন যাতে সর্বোচ্চ লাভ নির্ণয় করা যায়।

- (b) Prove that the set of all feasible solutions to an L.P.P $Ax = b, x \geq 0$ is a closed convex set. 8

প্রমাণ করুন যে $Ax = b, x \geq 0$ রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সকল কার্যকর সমাধানের সেটটি একটি বন্ধ উত্তল সেট।

8. (a) Solve graphically the following L.P.P: 8

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সমাধান করুন:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Subject to, } & 2x_1 + 7x_2 \geq 22 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (b) Solve the following L.P.P by simplex method: 8

Simplex পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যার সমাধান করুন।

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{Subject to, } & x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- 9 .(a) Write down the dual of the following primal problem. 8

নিম্নলিখিত L.P.P টির দ্বৈত সমস্যাটি লিখুন।

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & z = x_1 + 3x_2 \\ \text{Subject to, } & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 + 2x_2 = 5, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \text{ Unrestricted in sign.} \end{aligned}$$

- (b) Find the optimal solution and the corresponding cost of the transportation in the following transportation problem.

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির সর্বাপেক্ষা অনুকূল সমাধান এবং অনুরূপ অনুকূল পরিবহন খরচ নির্ণয় করুন।

	D ₁	D ₂	D ₃	a _j
O ₁	3	2	5	
O ₂	9	1	2	
O ₃	4	3	1	
b _j				

- 10.(a) Find the optimal assignment and the corresponding optimal cost from the following cost matrix.

নীচের মূল্য ম্যাট্রিক্স হইতে চরম আরোপ এবং সংশ্লিষ্ট চরম মূল্য নির্ণয় করুন।

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅
J ₁	3	8	2	10	3
J ₂	8	7	2	9	7
J ₃	6	4	2	7	5
J ₄	8	4	2	3	5
J ₅	9	10	6	9	10

- (b) Solve the following L.P.P by Charnes' Big M-method.

Charnes' Big M পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রোগ্রাম সমস্যাটির সমাধান করুন।

Maximize, $z = 2x_1 - 3x_2$

Subject to $-x_1 + x_2 \geq -2$

$5x_1 + 4x_2 \leq 46$

$7x_1 + 2x_2 \geq 32$

$x_1, x_2 \geq 0.$

Group-C

বিভাগ-গ

[Full Marks-40]

Answer Question No. 11 and any two questions from the rest.

১১নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

11. Answer any four questions from the following:

2×4 = 8

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) A particle moving in a straight line has the following relation between the velocity v and the distance x from the origin O :

$$v = \sqrt{\mu - x^2}, \mu > 0. \text{ Show that the motion is S.H.M.}$$

একটি বস্তুকণা সরলরেখায় গতিশীল এবং মূলবিন্দু O থেকে x দূরত্বে v গতিবেগ প্রদত্ত হয়

$$v = \sqrt{\mu - x^2}, \mu > 0 \text{ দ্বারা। দেখান যে, গতিটি হয় সরল সমঞ্জস্য গতি (S.H.M.)।}$$

- (b) If a point P moves in a curve so that the tangential and normal accelerations are equal, prove that the velocity varies as e^{ψ} , when ψ has usual meaning.

একটি বিন্দু P একটি বক্রের উপর এরূপে গতিশীল যে স্পর্শক ও অভিলম্ব বরাবর ত্বরণ সমান হয়। প্রমাণ করুন যে গতিবেগ e^{ψ} -এর সঙ্গে সরলভেদে আছে যেখানে ψ প্রতীকটি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

- (c) State the principles of conservation of linear momentum.

রৈখিক ভরবেগের নিত্যতার সূত্রটি বিবৃত করুন।

- (d) Show that in a central orbit, the angular momentum is always conserved.

দেখাও যে কেন্দ্রীয় কক্ষ পথে কৌণিক ভরবেগ সর্বদা সংরক্ষিত হয়।

- (e) What is impulsive force? How is it measured?

ঘাত বল কি? কিভাবে তা পরিমাপ করা হয়?

- (f) Show that the change in kinetic energy of a body is equal to the work done by the forces acting on it.

দেখাও যে-কোন বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল দ্বারা নির্দিষ্ট যে কাজ করা হয় তা তার গতিশক্তির পার্থক্যের সমান।

- (g) From what height must a heavy elastic ball be dropped on the floor so that rebounding once it will reach a height of 8 metre? (Let $e = \frac{1}{2}$)

কত উচ্চতা থেকে একটি ভারী স্থিতিস্থাপক বলকে মাটিতে ফেললে সেটি একবার লাফিয়ে ৪ মিটার উচ্চতায় উঠতে পারবে? ($e = \frac{1}{2}$ ধরুন)

- 12.(a) A particle of mass m moves in a straight line under an attractive force mn^2x towards a fixed point on the line when at a distance x from it. If it be projected with a velocity v towards the centre of force from an initial distance a from it, prove that it reaches the centre of force after a time $\frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{na}{v}$.

সরলরেখায় গতিশীল m ভর বিশিষ্ট একটি কণার ওপর ঐ সরলরেখাে একটি স্থির বিন্দু অভিমুখী আকর্ষক বল mn^2x , যেখানে স্থির বিন্দু থেকে কণাটির দূরত্ব x । ঐ কেন্দ্রবিন্দু থেকে a দূরত্বে কণাটি v বেগে বিন্দুটির দিকে প্রক্ষিপ্ত হলে দেখান যে কেন্দ্রবিন্দুতে পৌঁছোতে কণাটির সময় লাগবে $\frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{na}{v}$ ।

- (b) A particle moves with a central acceleration $\mu \div (\text{distance})^2$. It is projected with velocity V at a distance R . Show that its path is rectangular hyperbola if the angle of projection is $\sin^{-1} \left[\mu / \left\{ VR \left(V^2 - \frac{2\mu}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]$.

কোন কণা $\mu \div (\text{দূরত্ব})^2$ এই কেন্দ্রীয় ত্বরণ দ্বারা গতিশীল। কণাটিকে R দূরত্ব থেকে V গতিবেগে উৎক্ষেপ করা হয়েছে। প্রক্ষেপ কোন $\sin^{-1} \left[\mu / \left\{ VR \left(V^2 - \frac{2\mu}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]$ হলে দেখান যে কণাটির গতিপথ একটি সমপরাবৃত্ত হবে।

- 13.(a) Write down the equations of motion of a particle moving in a central orbit under a central force P and deduce the differential equation in the form

8

$$\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = P; \text{ symbols having usual meaning.}$$

কেন্দ্রীয় বল P -এর অধীনে কেন্দ্রীয় কক্ষপথে গতিশীল একটি কণার গতির সমীকরণ লিখুন এবং

প্রমাণ করুন যে $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = P$; প্রতীকগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত হয়েছে।

- (b) A particle moves under a central repulsive force $m\mu \div (\text{distance})^3$ and is projected from an apse at a distance ' a ' with a velocity v . Show that the equation to the path is $r \cos p\theta = a$ and the angle described in time ' t ' is

8

$$\frac{1}{p} \tan^{-1} \left(\frac{pvt}{a} \right) \text{ where } p^2 = \frac{a^2 v^2 + \mu}{a^2 v^2}.$$

একটি বস্তুকণার ওপর একটি কেন্দ্রীয় বিকর্ষী বল $m\mu \div (\text{দূরত্ব})^3$ ক্রিয়াশীল। বস্তুকণাটিকে a দূরত্বে অবস্থিত apse থেকে v বেগে ক্ষেপন করা হল। প্রমাণ করুন যে বস্তুকণার গতিপথের সমীকরণ হবে $r \cos p\theta = a$ এবং ঐ কণাটি t সময়ে কেন্দ্রে যে কোন উৎপন্ন করে তা হবে

$$\frac{1}{p} \tan^{-1} \left(\frac{pvt}{a} \right), \text{ যেখানে } p^2 = \frac{a^2 v^2 + \mu}{a^2 v^2}।$$

- 14.(a) T_1 and T_2 are periods of vertical oscillations of two different weights suspended by an elastic string. If c_1 and c_2 be the statical extensions due to these weights and g the acceleration due to gravity, show that

8

$$g = \frac{4\pi^2(c_1 - c_2)}{T_1^2 - T_2^2}$$

একটি স্থিতিস্থাপক দড়ির দ্বারা দুটি বিভিন্ন ওজন ঝোলালে T_1 এবং T_2 দুটি উল্লম্ব দোলনের পর্যায়কাল পাওয়া যায়। ঐ দুটি ওজনের ফলে যদি দড়িটির দৈর্ঘ্য c_1 এবং c_2 প্রসারিত হয় তবে

দেখান যে $g = \frac{4\pi^2(c_1 - c_2)}{T_1^2 - T_2^2}$, যেখানে g হল অভিকর্ষজ ত্বরণ।

- (b) Define escape velocity. Find an approximate expression for it.

8

মুক্তিবেগের সংজ্ঞা লিখুন। এর একটি আসন্ন অভিব্যক্তি নির্ণয় করুন।

- 15.(a) If v_1, v_2 are the linear velocity of a planet when it is respectively nearest and furthest from the sun, prove that $(1-e)v_1 = (1+e)v_2$, when e is the eccentricity of the orbit of the planet.

যদি v_1 এবং v_2 একটি গ্রহের রৈখিক বেগ হয় যখন গ্রহটির সূর্য থেকে দূরত্ব সর্ব নিম্ন এবং সর্বোচ্চ, তবে প্রমাণ করুন $(1-e)v_1 = (1+e)v_2$, যেখানে e হল গ্রহটির কক্ষ পথের উৎকেন্দ্রতা।

- (b) A particle describes the path $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ under a force which is always directed to pole. Find the law of force.

কোন কণা $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ পথে এমন বলের অধীনে গতিশীল যা সর্বদাই মেরু অভিমুখী। বলের সূত্রটি নির্ণয় করুন।

Group-D

বিভাগ-ঘ

[Full Marks-40]

Answer Question No. 16 and any two questions from the rest.

১৬ নং প্রশ্ন ও অন্য যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

16. Answer any four questions from the following:

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

- (a) Define 'event space', 'random experiment' and hence give the definition of probability of an event A in the event space S connected with the random experiment E . 2×4 = 8

ঘটনাদেশ ও সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষণের সংজ্ঞা দিন। উহা হইতে সম্ভাবনা ভিত্তিক পরীক্ষণ E -র সহিত যুক্ত ঘটনাদেশ S -এ একটি ঘটনা A -র ঘটিবার সম্ভাবনার সংজ্ঞা দিন।

- (b) A fair coin is tossed 5 times. What is the probability of getting at least one 'head'?

একটি স্বাভাবিক মুদ্রাকে 5 বার টস করা হইল। অন্ততঃ একটি হেড পড়িবার সম্ভাবনা কত?

- (c) If $f(x) = ke^{-x}$ ($0 \leq x < \infty$) be the probability density function of a continuous random variable x , find k .

যদি কোন অস্তুত সম্ভাব্য চল x -এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(x) = ke^{-x}$ ($0 \leq x < \infty$) হয় তবে k -এর মান নির্ণয় করুন।

- (d) If A and B are two independent events then show that \bar{A} and \bar{B} are also independent.

যদি A ও B দুটি নিরপেক্ষ ঘটনা হয় তবে প্রমাণ করুন যে \bar{A} ও \bar{B} নিরপেক্ষ হবে।

- (e) Given $\text{Cov}(x, y) = 10$, $r = 0.4$ and $\sigma_y = 5$, then find σ_x .

প্রদত্ত $\text{Cov}(x, y) = 10$, $r = 0.4$ এবং $\sigma_y = 5$, σ_x -এর মান নির্ণয় করুন।

- (f) If the second and third central moments of a distribution are 4 and 10 respectively, find the skewness of the distribution.

কোন পরিসংখ্যা বিভাজনের দ্বিতীয় ও তৃতীয় কেন্দ্রীয় moment যথাক্রমে 4 ও 10 এর skewness নির্ণয় করুন।

- (g) Define 'Parameter' and 'Statistic'.

Parameter ও Statistic-এর সংজ্ঞা দিন।

- 17.(a) State and prove Bayes' theorem. 8

Bayes' উপপাদ্য বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

- (b) Find the probability of getting an even number on the first or a total of 8 in a single throw of two dice. 8

দুটি ছক্কে একবার করে নিক্ষেপ করলে প্রথমটিতে জোড় সংখ্যা অথবা মোট 8 পড়বার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

- 18.(a) Prove that the correlation coefficient r between two variables x and y lies between -1 and $+1$. 8

প্রমাণ করুন যে x ও y চলরাশিদের অনুবন্ধ সহগ r , -1 ও $+1$ -এর মধ্যবর্তী হয়।

- (b) A random sample of 100 articles taken from a batch of 2000 articles shows that the average diameter of the articles = 0.354 with S.D = 0.048. Find 95% confidence interval for the average diameter of this batch of 2000 articles. (Assume normal distribution; given $P[-1.96 \leq z \leq 1.96] = 0.95$ where z is $N(0, 1)$).

2000 টি দ্রব্যের একটি দল থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে 100টি দ্রব্যের একটি নমুনা নেওয়া হল। এদের গড় ব্যাস 0.354 এবং S.D = 0.048। এই 2000টি দ্রব্যের দলের গড় ব্যাসের 95% confidence বিস্তার নির্ণয় করুন।

(মনে করুন NORMAL বিভাজন এবং $P[-1.96 \leq z \leq 1.96] = 0.95$ এবং $N(0, 1)$)।

- 19.(a) The random variable X has the distribution given by

$$P(X = k) = 2^{-k}, k = 1, 2, \dots$$

Show that $E(X) = \text{Var}(X) = 2$.

রানডম চল X -এর বিভাজন নীচে দেওয়া হল:

$$P(X = k) = 2^{-k}, k = 1, 2, \dots$$

দেখান যে, $E(X) = \text{Var}(X) = 2$ ।

- (b) Determine the trend using 4 year moving average method from the following data:

নীচের তথ্য প্রেনীর ক্ষেত্রে 4 বর্ষীয় গতিশীল গড় নির্ণয় করুন:

Year (বৎসর)	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Yearly Sale (বাৎসরিক বিক্রয়) (Rs. 0000)	3.6	4.3	4.3	3.4	4.4	5.4	3.4	2.4

- 20.(a) Find x from the following, given that the ratio between Laspeyre's and Paasche's index number is 28:27.

x -এর মান নির্ণয় করুন সেখানে Laspeyre's এবং Paasche's-এর সূচকের অনুপাত 28:27।

Commodities	Base year		Current year	
	Price (Rs.)	Quantity	Price (Rs.)	Quantity
A	1	10	2	5
B	1	5	x	2

(b) For what value of k the function,

$$f(x) = kx(1-x^2), 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0, \text{ elsewhere}$$

will satisfy the condition of probability density function. Find the mean and mode of this distribution.

k -এর কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি সম্ভাব্য ঘনত্ব অপেক্ষক হইবার শর্তটি সিদ্ধ করিবে?

$$f(x) = kx(1-x^2), 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0, \text{ অন্যত্র}$$

এই নিবশেনটির গড় ও সংখ্যাগরিষ্ঠ মান নির্ণয় করুন।

Group-E

বিভাগ-ঙ

[Full Marks-40]

[Throughout the entire group, Δ stands for the difference operator, E stands for the shift operator and $y'(x)$ stands for $\frac{dy}{dx}$.]

[সমগ্র বিভাগে Δ = পার্থক্য অপারেটর E = শিফট অপারেটর ও $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ বুঝবেন।]

Answer Question No. 21 and any *two* questions from the rest.

21 নং প্রশ্ন এবং অবশিষ্ট প্রশ্নগুলি থেকে যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দিন।

21. Answer any *four* questions from the following:

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দিন:

(a) Show that $\Delta^2(\log x) = \log \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$, taking difference interval unity.

পার্থক্য অন্তরাল একক ধরিয়া দেখান যে $\Delta^2(\log x) = \log \left[1 - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$ ।

(b) Show that $\left(\frac{\Delta}{E}\right) \sin 2x = 2 \cos(2x - h) \sin h$.

দেখান যে $\left(\frac{\Delta}{E}\right) \sin 2x = 2 \cos(2x - h) \sin h$ ।

(c) Obtain the difference equation from the relation

$u_x = A3^x + B(-5)^x$, when A and B are parameters.

$u_x = A3^x + B(-5)^x$ যেখানে A ও B হল প্যারামিটার, সম্পর্ক থেকে অন্তর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(d) Examine if the curve $y(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$, when n is sufficiently large and $y_1(x) = 0$ and $[0, \pi]$ are close in the sense of first order proximity or not.

বক্ররেখা $y(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ যেখানে n যথেষ্ট বৃহৎ এবং $y_1(x) = 0$, $[0, \pi]$ এই অন্তরালে এইরূপে বক্ররেখা দুইটি প্রথম ঘাত proximity অর্থে সন্নিহিত কিনা পরীক্ষা করুন।

(e) Write down the Euler's equation for an extremum of a functional.

$$V[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx; y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1.$$

উপরোক্ত functional টির চরম মানের জন্য Euler-এর সমীকরণটি লিখুন।

(f) Show that the functional $V[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)] dx$ is linear.

দেখান যে $V[y(x)] = \int_a^b [y'(x) + y(x)] dx$ টি রৈখিক।

(g) If $y = cx + c^2$, show that $y = x\Delta y + (\Delta y)^2$.

যদি $y = cx + c^2$; দেখান যে $y = x\Delta y + (\Delta y)^2$ ।

22.(a) Solve: $u_{x+2} + u_{x+1} - 12u_x = 5^x, x \geq 1$. 6

সমাধান করুন $u_{x+2} + u_{x+1} - 12u_x = 5^x, x \geq 1$ ।

(b) Find the extremal of the functional 5

$$V[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx; y(a) = A, y(b) = B.$$

$V[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx; y(a) = A, y(b) = B$ এই functional টির extremal নির্ণয় করুন।

(c) Find u_x if $u_1 = 8, u_2 = 200$ and $u_x = 63u_{x-2} - 2u_{x-1}$. 5

$u_1 = 8, u_2 = 200$ এবং $u_x = 63u_{x-2} - 2u_{x-1}$ হলে u_x বার করুন।

23.(a) State and prove the problem of Brachistochrone. 2+8

- Brachistochrone সমস্যাটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন।

(b) Find the solution of the equation $u_{x+4} + u_x = 0$. 6

$u_{x+4} + u_x = 0$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করুন।

24.(a) Solve the difference equation $(E^2 - 11E + 30)u_x = x3^x$. 5

অন্তর সমীকরণ সমাধান করুন: $(E^2 - 11E + 30)u_x = x3^x$.

(b) Find the extremal of the isoperimetric problem 6

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx \text{ given that } \int_0^1 y^2 dx = 2, y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Isoperimetric সমস্যাটির extremal নির্ণয় করুন:

$$V[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx; \text{ দেওয়া আছে } \int_0^1 y^2 dx = 2, y(0) = 0, y(1) = 0 \text{।}$$

(c) Test for an expression of the functional

5

নিম্নলিখিত Functional-এর একটি extremum-এর জন্য পরীক্ষা করুন।

$$V[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1.$$

25.(a) Find the area that maximizes the area enclosed by a rectangle of fixed perimeter.

6

স্থির পরিসীমায়ুক্ত আয়তক্ষেত্রের যে ক্ষেত্রফল সেটিকে চরমতম মান দেয় তা নির্ণয় করুন।

(b) If $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)$, then find $\Delta^4 y_n$.

5

যদি $y_n = n(n-1)(n-2)(n-3)$ হয় তাহলে $\Delta^4 y_n$ -এর মান নির্ণয় করুন।

(c) Show that: (দেখাও যে): $\Delta^{-1} \sin ax = \frac{-\cos(ax - \frac{a}{2})}{2 \sin \frac{a}{2}}$.

5